

СТАРША ЛІГА

1. Визначимо спочатку розрахункову швидкість u мікросупутників (МС) відносно корабля. Очевидно, МС мали виходити на орбіти з максимальною відстанню від центра Місяця $R = 1750$ км та мінімальною $r = 1700$ км. Швидкість МС відносно Місяця в «апогеї» $v_0 - u$, а в «перигеї» відповідно до закону збереження моменту імпульсу $(v_0 - u)R/r$. Тут $v_0 = \sqrt{GM/R}$ — орбітальна швидкість корабля. Скористаємося законом збереження енергії:

$$\frac{m(v_0 - u)^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = \frac{m(v_0 - u)^2 R^2}{2r^2} - G\frac{Mm}{r}.$$

Звідси $u = v_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2r}{R+r}} \right) \approx v_0 \frac{R-r}{2(R+r)}$. Такий самий результат можна було отримати й

через вираз для механічної енергії МС через велику піввісь a орбіти: $W = -G\frac{Mm}{2a}$.

Отже, реально всім МС надається відносно корабля швидкість, модуль якої $2u$. Знайдемо, за якої умови МС потрапить на поверхню Місяця. Напишемо складові швидкості МС відносно Місяця: $v_p = v_0 + 2u \cos \alpha$, $v_{\perp} = 2u \sin \alpha$. Тут кут α відраховуємо між \vec{v}_0 і $2\vec{u}$. Модуль швидкості $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 4u^2 + 4v_0 u \cos \alpha}$.

Падіння відбувається за умови $v_1 \leq v_0 - u$. Звідси отримуємо «крайній» можливий кут: $\cos \alpha = -\frac{1}{2} - \frac{3u}{4v_0} \approx -\frac{1}{2}$, тобто $\alpha \approx 120^\circ$ (як і можна було передбачити).

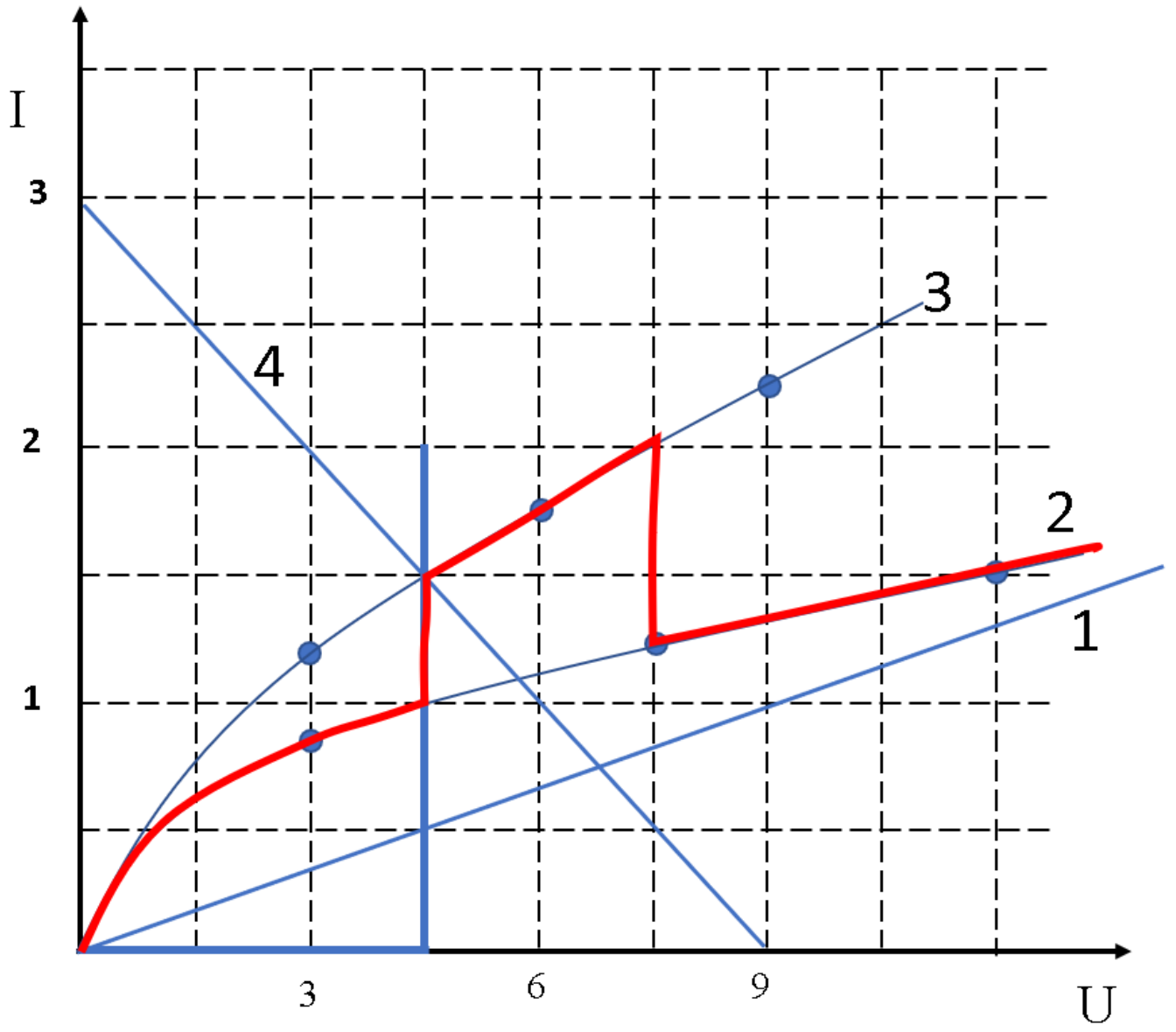
Площина орбіти МС при цьому утворює з площиною орбіти корабля кут $\beta = \arcsin \frac{v_{\perp}}{v_0 - u} = \frac{u\sqrt{3}}{v_0}$ (ми врахували, що цей кут малий). Цікаво, що для «крайнього» кута падіння відбувається практично на осі смуги. Максимальне ж відхилення від осі смуги не перевищує $\square R$. Це приблизно чверть від висоти початкової орбіти, тобто не більше ніж 13 км. Отже, всі мікросупутники опиняться в зазначеній смузі.

2. Очевидно, електрони нерелятивістські. Мінімальні та максимальні кінцеві швидкості відповідають пружним зіткненням. Найпростіше перейти в систему відліку центра мас, швидкість якої $v_0 \cos \frac{\alpha}{2}$. У цій системі відліку швидкість електронів $v_0 \sin \frac{\alpha}{2}$. Унаслідок зіткнення вона може тільки змінити напрям. Отже, максимальна та мінімальна швидкості в лабораторній системі відліку відповідно $v_0 \cos \frac{\alpha}{2} \pm v_0 \sin \frac{\alpha}{2}$. Кінетична енергія $W = W_0(1 \pm \sin \alpha)$. Звідси отримуємо можливі значення кута між пучками: 60 або 120 градусів. Мінімальна кінетична енергія 1,3 кеВ (що було очевидно й відразу з міркувань збереження енергії).

3. До зіткнення куля має імпульс mv_0 і момент імпульсу $L_0 = I\omega_0 = \frac{2}{5}mr^2\omega_0$. Оскільки куля котилася без проковзування, $v_0 = r\omega_0$. Таким чином, $L_0 = \frac{2}{5}mrv_0$.

В результаті пружного зіткнення зі стінкою швидкість поступального руху змінює напрям на протилежний, а обертання зберігається. В результаті отримуємо рух з проковзуванням доти, доки обертання не зміниться на протилежне з кутовою швидкістю $\omega = \frac{v}{r}$. Тоді зміна імпульсу $m(v_0 - v) = \mu mg\tau$, де τ — час гальмування, а зміна моменту імпульсу $I(\omega_0 + \omega) = \mu mgr\tau$. Звідси $\frac{v_0 + v}{v_0 - v} = \frac{5}{2}$. Отже, $v = \frac{3}{7}v_0$.

4.



ЮНІОРИ

1. Сила натягу лівої нитки

$$T_1 = \frac{m_{Al} \cdot g \cdot (\rho_{Al} - \rho_B)}{\rho_{Al}}$$

Сила натягу правої нитки

$$T_2 = T_1 \frac{l_1}{l_2} \quad \text{де} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{7}{3}.$$

В той же час сила тиску на дно правої посудини при таненні льоду збільшилась на

$$T_2 = \Delta p \cdot S_2 = \rho g \Delta h_2 \cdot S_2,$$

Звідки

$$\Delta h_2 = \frac{T_2}{\rho_B \cdot g \cdot S_2} = \frac{T_1 \cdot l_1}{\rho_B \cdot g \cdot S_2} = \frac{m_{Al} \cdot g \cdot (\rho_{Al} - \rho_B) \cdot l_1}{\rho_{Al} \cdot l_2 \cdot \rho_B \cdot g \cdot S_2} \approx 0,5 \text{ (см)}$$

2. Оскільки струм через резистор R_3 не тече, тому напруга на резисторі R_2 дорівнює U_2 . Позначимо опір частини CD резистора R_1 як r_x , тоді опір частини резистора CB дорівнює $(R_1 - r_x)$. Оскільки r_x та R_2 з'єднані паралельно, то напруга на r_x дорівнює U_2 . Записавши закон Ома для контуру $ABDE$, отримаємо:

$$U_1 = I(R_1 - r_x) + U_2 \quad (1)$$

Записавши закон Ома для контуру $BDMK$, отримаємо:

$$I = \frac{U_2(R_2 + r_x)}{R_2 r_x} \quad (2)$$

Підставивши (2) в (1) і звівши подібні отримаємо:

$$r_x^2 + r_x \left(\frac{U_1}{U_2} R_2 - R_1 \right) - R_1 R_2 = 0$$

Розв'язавши дане квадратне рівняння отримаємо: $r_{x1} = -161,8 \text{ Ом}$ та $r_{x2} = 61,8 \text{ Ом}$.

Від'ємний корінь не має фізичного змісту, тому $r_x = 61,8 \text{ Ом}$. Тобто повзунок реостата

ділить резистор R_1 на частини опори яких дорівнюють: $r_x = 61,8 \text{ Ом}$ та $R_1 - r_x = 38,2 \text{ Ом}$.

Оскільки опори частин r_x та $(R_1 - r_x)$ прямо пропорційні до їх довжин (L_{CD} та L_{BC} відповідно), тому

$$\frac{L_{BC}}{L_{CD}} = \frac{R_1 - r_x}{r_x} = 1,6 \approx \frac{5}{3}$$

Відповідь: повзунок ділить реостат у відношення 5:3.

3. За початкових умов усі пружини не деформовані. Після опускання рухомого блоку всі «нижні» пружини розтягнуті однаковою силою, а «верхня» — подвійною силою. Якщо видовження «нижньої» пружини x , то видовження «верхньої» $2x$. Нехай рухомий блок опустили на h . Тоді загальна довжини нитки і трьох «нижніх» пружин збільшилася на $2h - 2 \times 2x$. З іншого боку, ця величина дорівнює $3x$. Звідси отримуємо $x = \frac{2}{7}h = 10 \text{ см}$. Саме на стільки піднялася точка A .

4. Звук удару дятла досягає членів журі за час T_0 . Відстань, яку він пройде за цей самий час, дорівнює $L_0 = cT_0$, де $c = 340$ м/с – швидкість звуку за умовою. Дах, що їде зі швидкістю V , за цей самий час пройде відстань $l = VT_0$.

Член журі, що добре чує, фіксує меншу кількість ударів дятла за одиницю часу, тому що за час T_0 відстань, яку необхідно подолати звуку, змінюється на l . Тоді нова відстань, яку долатиме звук удару, дорівнюватиме $L = cT$.

Отримаємо рівняння $L_0 = L - l$.

$$cT_0 = (c - V)T$$

Звідси $V = c(1 - T_0/T)$.

$T_0 = 1$ с, $T = 60/59$ с (з умови задачі).

Знайдемо числове значення V .

$$V = 340 \text{ м/с} (1 - 59/60) = 5\frac{2}{3} \text{ м/с.}$$

5.

