XXV відкрита Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики «Турнір Чемпіонів»

Математика. Розв'язання задач

Юніорська ліга

1. Цілі числа a, b, c та натуральне число n такі, що $a+b+c=1$ та $a^2+b^2+c^2=2n+1$. Доведіть, що число $a^3+b^2-a^2-b^3$ ділиться на n.

Розв'язання. З умови слідує, що $a^2+b^2+(1-a-b)^2=2n+1$, що рівносильно рівності $a^2+b^2+ab-(a+b)=n$. Тому

$$a^3+b^2-a^2-b^3=(a^3-b^3)-(a^2-b^2)=(a-b)(a^2+b^2+ab-(a+b))= \\ =(a-b)\cdot n,$$

тобто $a^3+b^2-a^2-b^3$ ділиться на n, що і потрібно довести.

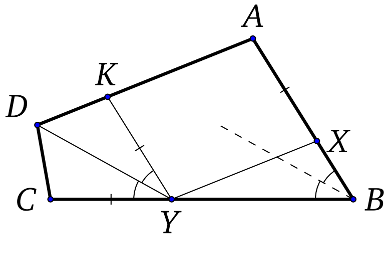
2. Є десять осіб, серед яких 9 лицарів та 1 брехун (лицарі завжди говорять правду, брехуни — завжди брешуть). Кожному із них дали по одній картці з натуральним числом від 1 до 10, причому всі числа на картках різні. Будь-кому можна задати таке запитання: «Чи правда, що на твоїй картці написано число m?» (замість m називається натуральне число від 1 до 10). Чи правда, що за 17 таких запитань гарантовано можна знайти брехуна?

Відповідь. Так, правда.

Розв'язання. Оберемо одну людину і почнемо задавати їй запитання послідовно про числа від 1 до 9. Не більше, ніж за три запитання ми можемо з'ясувати, чи вона є лицарем чи брехуном. Справді, якщо ця людина є брехуном, то ми отримаємо принаймні дві ствердні відповіді на перші три питання. В іншому випадку ця людина — лицар. Тоді загалом не більше, ніж за 9 запитань ми дізнаємося, що написано на його картці: якщо число від 1 до 9, то ми отримуємо ствердну відповідь на відповідне запитання, а якщо число 10 — то відповіді на всі 9 запитань будуть негативними. Взнавши, яке число m написано на картці у першої людини, задамо восьми людям із решти запитання про знайдене число m. Якщо хтось дасть ствердну відповідь — він і є брехуном, якщо всі дадуть негативну відповідь — брехун той, кому ми не задавали запитань. Усього було задано не більше 17 запитань.

3. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кути A та C дорівнюють по 100°. На сторонах AB та BC обрали точки X та Y відповідно так, що $AX=CY$. Виявилося, що пряма YD паралельна до бісектриси кута ABC. Знайдіть кут AXY (в градусах).

Відповідь. 80°.



Розв'язання. Проведемо через точку Y пряму, паралельну AB. Нехай вона перетне AD в точці K. Тоді $\angle DYC = \angle DYK$ і $\angle C = 100^\circ = \angle BAD = \angle YKD$, тому трикутники DYC і DYK рівні за стороною і двома прилеглими до неї кутами. Отже, $YK = YC = AX$ та $AXYK$ — паралелограм. А тоді $\angle AXY = \angle AKY = 80^\circ$.

4. Дано коло довжини 90. Чи можна позначити на ньому 10 точок так, щоб серед дуг з кінцями в цих точках знайшлись дуги зі всіма цілочисельними довжинами від 1 до 89?

Відповідь. Ні.

Розв'язання. Якщо на колі позначено 10 точок, то можна виділити 90 дуг цього кола з кінцями у вказаних точках. Ми повинні отримати 45 дуг різної непарної довжини. Оскільки парних дуг 44, то дуг непарної довжини не більше $90 - 44 = 46$, при цьому дуга довжини 45 не може бути єдиною, оскільки вона є півколом. Це означає, що нам потрібно рівно 46 дуг з непарною довжиною.

Візьмемо будь-яку із 10 точок в якості початку відліку. Якщо дуга від неї до i-ої точки непарна, то i-ту точку назвемо *непарною*, а в іншому випадку — *парною*. Якщо всього є k непарних точок і $10 - k$ парних (включаючи початок відліку), то непарні довжини дуг будуть виключно між непарними і парними точками, тому їхня кількість дорівнює $2k(10-k)$. Але рівняння $2k(10-k) = 46$ не має цілих коренів, оскільки 23 — просте число. Тому вибрати потрібним чином 10 точок неможливо.

Зауваження. На колі з довжиною 91 поставити 10 точок, забезпечивши всі різні дуги від 1 до 90, можливо. Один із варіантів такий (пераховані відстані між сусідніми точками): 1, 5, 4, 13, 3, 8, 7, 12, 2, 36.

5. Впорядкована трійка різних натуральних чисел (a, b, c) називається *надихаючою*, якщо при діленні a на b отримується остача c. Чи існує набір натуральних чисел, в якому надихаючих трійок рівно в 1000 разів більше, ніж чисел в цьому наборі?

Відповідь. Так, існує.

Розв'язання. Ми побудуємо набір із 2003 чисел, в якому кількість надихаючих трійок становитиме $1000 \cdot 2003$.

Розглянемо послідовність чисел $1, 2, 3, 7, 43, \ldots$ (кожне наступне число отримується додаванням одиниці до добутку всіх попередніх; всього 2002 числа). Для довільних чисел $a > b > 1$ із цього ряду трійка $(a, b, 1)$ — надихаюча, а решта трійок — не є надихаючими. Всього таких трійок $\frac{2001 \cdot 2000}{2}$. Додамо до цього ряду 2003-є число виду $2x + 1$, де $x + 1$ — 2002-е число (іншими словами, x — добуток перших 2001 чисел послідовності). Тоді всі старі надихаючі трійки так і залишаються надихаючими, і до них додаються надихаючі трійки виду $(2x + 1, b, 1)$, де $1 < b < x + 1$ (оскільки число x ділиться на число b, то остача від ділення $2x + 1$ на b дорівнює 1). А трійка $(2x + 1, x + 1, 1)$ та трійки, у яких третє число відмінне від 1, надихаючими не будуть (адже остача при діленні $2x + 1$ на $x + 1$ дорівнює x). Отже, в новому ряду чисел кількість надихаючих трійок дорівнює $\frac{2001 \cdot 2000}{2} + 2000 = 1000 \cdot 2003$. Таким чином, побудований набір чисел задовольняє умову задачі.