XXIV Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики

"***Турнір чемпіонів***"

2017 р.

Математика.

Юніорська ліга.

1. В рядок записано 101 цифру: нулі та одиниці. Для кожної некрайньої цифри *а* обирається цифра, яка хоча б двічі зустрічається серед *а* та її сусідів зліва та справа, і ця цифра записується під *а*. З отриманим рядком (який вже складається із 99 цифр) виконується аналогічна операція, з новим рядком – знову така ж дія, і т.д., доки не залишиться одна цифра. Виявилось, що ця цифра — 1. При якій найменшій кількості одиниць в початковому рядку це могло статися?

2. В опуклому шестикутнику *ABCDEF* кути при вершинах *B*, *C*, *E* і *F* рівні, а прямі *BC* та *EF* паралельні. Довести, що $AB + AF = CD + DE$.

3. Нехай n – натуральне і a_1, a_2,..., a_{2n+1} – набір цілих чисел. Доведіть, що існує така перестановка b_1, b_2,..., b_{2n+1} цих чисел, що число $(b_1 - b_2)(b_3 - b_4)\ldots(b_{2n-1} - b_{2n})$ кратне $2^n \cdot n!$.

4. На столі розташовано три стопки дисків. В кожній стопці внизу лежать 11 чорних дисків, потім 10 білих, потім 9 чорних, 8 білих, …, 1 чорний. Оленка та Петро грають у таку гру. Вони по черзі беруть диски зі стопок, причому за один хід необхідно взяти зверху з довільної стопки кілька однокольорових дисків. Починає Оленка. Програє той, хто взяв останній диск. Хто з гравців може гарантовано перемогти незалежно від того, як грає суперник?

5. Дійсні числа *a*, *b* і *c* належать відрізку [–2;2]. Якого найбільшого значення може набувати вираз $\left|a^2 - bc + 1\right| + \left|b^2 - ca + 1\right| + \left|c^2 - ab + 1\right|$?

XXIV Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики

"***Турнір чемпіонів***"

2017 р.

Математика.

Юниорская лига.

1. В строку выписана 101 цифра: нули и единицы. Для каждой не крайней цифры a выбирается цифра, которая хотя бы дважды встречается среди a и её соседей слева и справа, и эта цифра записывается под a. С полученной строкой (которая уже состоит из 99 цифр) выполняется аналогичная операция, с новой строкой – снова то же действие и т.д. до тех пор, пока не останется одна цифра. Оказалось, что эта цифра – 1. При каком наименьшем количестве единиц в начальной строке это могло случиться?

2. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах B, C, E и F равны, а прямые BC и EF параллельны. Доказать, что $AB+AF=CD+DE$.

3. Пусть n – натуральное и a_1, a_2,..., a_{2n+1} – набор целых чисел. Докажите, що существует такая перестановка b_1, b_2,..., b_{2n+1} этих чисел, что число $(b_1-b_2)(b_3-b_4)...(b_{2n-1}-b_{2n})$ кратно $2^n \cdot n!$.

4. На столе расположены три стопки дисков. В каждой стопке внизу лежат 11 черных дисков, затем 10 белых, потом 9 черных, 8 белых, ..., 1 черный. Лена и Петя играют в такую игру. Они по очереди берут диски со стопок, причем за один ход необходимо взять сверху с произвольной стопки несколько одноцветных дисков. Начинает Лена. Проигрывает тот, кто взял последний диск. Кто из игроков может гарантированно победить независимо от того, как играет соперник?

5. Действительные числа a, b и c принадлежат отрезку [–2;2]. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\left|a^2-bc+1\right|+\left|b^2-ca+1\right|+\left|c^2-ab+1\right|$?