

1. Довести, що для довільного дійсного x виконується рівність

$$[x] + \left[x + \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] = [3x]$$

(тут $[x]$ - це найбільше ціле число, яке не перевищує x).

2. На площині дано чотири точки: $A(0;0)$, $B(2015;2015)$, $C(0;2015)$, $D(-2015;0)$. Знайти усі такі пари цілих чисел $(b;c)$, для яких графік квадратного тричлена $y = x^2 + bx + c$ перетинає кожну із прямих AB , BC , CD та DA , причому усі точки перетину мають цілі координати.

3. В рівнобедреному трикутнику ABC ($AB=AC$) проведено бісектрису BD (точка D належить AC). Відомо, що $BC = BD + AD$. Знайти градусну міру кута BAC .

4. Дільник натурального числа назвемо власним, якщо він відмінний від 1 і самого цього числа. Натуральне число назвемо гарним, якщо найбільший власний дільник цього числа дорівнює сумі власного дільника, другого за величиною і власного дільника, третього за величиною. Наприклад, число 18 є гарним, оскільки 9 (його найбільший власний дільник) дорівнює сумі чисел 6 (другий власний дільник за величиною) і 3 (третій власний дільник за величиною). Скільки існує гарних чисел, які не перевищують 1500000?

5. Усі натуральні числа пофарбовано у два кольори: чорний і білий. Відомо, що для довільних двох чисел різного кольору їхня сума є чорним числом, а добуток – білим.

а) Якого кольору може бути добуток двох білих чисел? Відповідь обґрунтуйте.

б) Знайти усі розфарбування чисел, які задовольняють умову задачі.