Турнір Чемпіонів – 2015

Задача 1. Розв'язати рівняння

$$\cos 3x + 39\cos x = 32x^3 + 48x^2 + 96x + 40.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу

$$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha,$$

перепишемо задане рівняння так:

$$-3\cos x + 4\cos^3 x + 39\cos x = 32x^3 + 48x^2 + 96x + 40,$$

$$4\cos^3 x + 36\cos x = 32x^3 + 48x^2 + 96x + 40,$$

а після скорочення на 4, одержимо:

$$\cos^3 x + 9\cos x = 8x^3 + 12x^2 + 24x + 10.$$

Виділимо в правій частині одержаного рівняння повний куб:

$$\cos^3 x + 9\cos x = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 + 18x + 9,$$

$$\cos^3 x + 9\cos x = (2x+1)^3 + 9(2x+1).$$

Далі, помічаємо, що в лівій частині останнього рівняння також виділяється повний куб:

$$(\cos x)^3 + 9\cos x = (2x+1)^3 + 9(2x+1).$$

Тому, розглянувши різницю між лівою і правою частинами останнього рівняння, розкладемо її на множники:

$$(\cos x)^3 + 9\cos x - (2x+1)^3 - 9(2x+1) = 0,$$

$$\big(\cos x - (2x+1)\big)\Big((\cos x)^2 + \cos x(2x+1) + (2x+1)^2\Big) + 9\big(\cos x - (2x+1)\big) = 0,$$

$$\big(\cos x - (2x+1)\big)\Big((\cos x)^2 + \cos x\cdot(2x+1) + (2x+1)^2 + 9\Big) = 0.$$

Оскільки

$$(\cos x)^2 + \cos x\cdot(2x+1) + (2x+1)^2 + 9 = \left(\cos x + \frac{2x+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(2x+1)^2 + 9 > 0$$

при усіх дійсних x, то останнє рівняння рівносильне рівнянню:

$$\cos x - (2x+1) = 0.$$

Для розв'язання цього рівняння розглянемо функцію $f(x) = \cos x - (2x+1)$. Оскільки $f'(x) = -\sin x - 2 < 0$ при усіх дійсних x, то ця функція строго спадає, тобто її графік перетинає вісь Ox щонайбільше у одній точці. Оскільки $f(0) = 0$, то $x = 0$ – єдиний корінь останнього рівняння. Так як усі перетворення рівнянь рівносильні, то $x = 0$ – усі корені заданого рівняння.

Відповідь. $x = 0$.

Задача 2. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ і $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ для всіх натуральних n. Доведіть, що для будь-якого натурального числа m існує такий індекс k, що m ділить x_k.

Розв'язання. Ми маємо право у рекурентному співвідношенні встановити $x_0 = 0$. Доведемо, що існує індекс $k \le m^3$ такий, що x_k ділиться на m.

Нехай r_t – остача від ділення x_t на m, для $t=0,\ 1,\ \dots,\ m^3+2$. Розглянемо m^3+1 трійок цих остач: (r_0,r_1,r_2), (r_1,r_2,r_3), …, $\left(r_{m^3},r_{m^3+1},r_{m^3+2}\right)$. Оскільки r_t може набувати m різних значень, то за принципом Діріхле одержуємо, що принаймні дві із цих трійок однакові. Нехай p – найменше число, для якого трійка (r_p,r_{p+1},r_{p+2}) співпадає з трійкою (r_q,r_{q+1},r_{q+2}), $p<q\le m^3$. Ми стверджуємо, що $p=0$. Припустимо, що це не так і $p\ge 1$. Використовуючи припущення, матимемо

$$r_{p+2}\equiv r_{p-1}+r_pr_{p+1}\pmod m$$

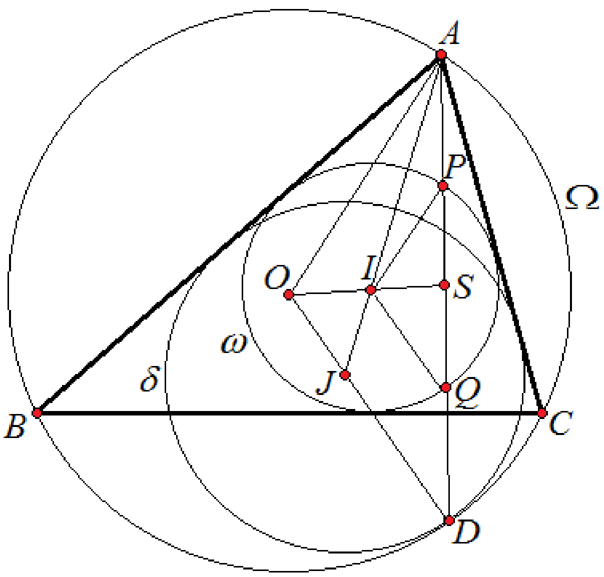
і

$$r_{q+2}\equiv r_{q-1}+r_qr_{q+1}\pmod m.$$

Оскільки $r_p=r_q$, $r_{p+1}=r_{q+1}$ і $r_{p+2}=r_{q+2}$, то $r_{p-1}\equiv r_{q-1}\pmod m$, тобто $r_{p-1}=r_{q-1}$. А тому, трійка (r_{p-1},r_p,r_{p+1}) співпадає з трійкою (r_{q-1},r_q,r_{q+1}), що суперечить вибору мінімального p. Отже, $p=0$ і $r_q=r_0=0$, тобто x_q ділиться на m, що і треба було довести.

Задача 3. Дано трикутник ABC. Нехай Ω – описане коло цього трикутника, а ω – вписане коло цього трикутника. Нехай δ – коло, яке дотикається сторін AB і AC, а також дотикається внутрішнім чином кола Ω у точці D. Пряма AD перетинає коло ω у двох точках P і Q (P лежить між A і Q). Нехай O та I – центри кіл Ω і ω. Доведіть, що $OD \parallel IQ$.

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі і будемо розв'язувати її, виходячи з нього.



Нехай R, r і ρ – радіуси кіл Ω, ω і δ відповідно. Розглянемо три гомотетії: перша – з центром D і коефіцієнтом $k_1=\dfrac{\rho}{R}$, друга – з центром A і коефіцієнтом $k_2=\dfrac{r}{\rho}$, а третя – з центром S і коефіцієнтом $k_3=\dfrac{r}{R}$. При першій гомотетії коло Ω відображається на коло δ, при другій гомотетії коло δ

відображається на коло ω, а при третій – коло Ω відображається на коло ω. Це означає, що композиція першої гомотетії з другою дає третю гомотетію. Доведемо, що їхні центри колінеарні. Для цього застосуємо теорему Менелая до трикутника OIJ і точок A, D і S, що лежать на його відповідних сторонах. Щоб довести колінеарність цих трьох точок, потрібно довести таке співвідношення:

$$\frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{DJ}}\cdot\frac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{AI}}\cdot\frac{\overrightarrow{IS}}{\overrightarrow{SO}}=-1.$$

Так як при першій гомотетії коло Ω відображається на коло δ, то точка O відображається на точку J, причому $\overrightarrow{DJ}=k_1\overrightarrow{DO}=\frac{\rho}{R}$, тобто $\frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{DJ}}=-\frac{R}{\rho}$.

Аналогічно обґрунтовується, що $\frac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{AI}}=-\frac{\rho}{r}$ і $\frac{\overrightarrow{IS}}{\overrightarrow{SO}}=-\frac{r}{R}$. Тому,

$$\frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{DJ}}\cdot\frac{\overrightarrow{JA}}{\overrightarrow{AI}}\cdot\frac{\overrightarrow{IS}}{\overrightarrow{SO}}=\left(-\frac{R}{\rho}\right)\left(-\frac{\rho}{r}\right)\left(-\frac{r}{R}\right)=-1,$$

що і завершує доведення колінеарності трьох точок A, D, S.

Оскільки точка S лежить на AD і третя гомотетія відображає коло Ω на коло ω, то точка D відображається на точку Q, а точка O на точку I. Це означає, що $OD \parallel IQ$ (бо при гомотетії прямі відображаються на паралельні прямі).

Задача 4. Нехай $P(x)$ – многочлен 20-го степеня з дійсними коефіцієнтами, а $f(x)=\frac{1}{x^{40}}$. Чи можуть графіки функцій $y=P(x)$ і $y=f(x)$ перетинатися рівно в 30 точках?

Розв'язання. Припустимо, що таке можливо. Тоді, по меншій мірі, при 30 значеннях x виконується рівність:

$$a_{20}x^{20}+a_{19}x^{19}+\ldots+a_1x+a_0=\frac{1}{x^{40}}.$$

Множачи на x^{40}, одержуємо, що многочлен 60-го степеня $(a_{20}\neq 0)$

$$Q(x)=a_{20}x^{60}+a_{19}x^{59}+\ldots+a_1x^{41}+a_0x^{40}-1$$

має не менше 30 різних дійсних коренів. Тоді, похідна цього многочлена повинна мати не менше 29 різних дійсних коренів. Але, ця похідна

$$Q'(x)=60a_{20}x^{59}+59a_{19}x^{58}+\ldots+41a_1x^{40}+40a_0x^{39}=$$
$$=x^{39}\left(60a_{20}x^{20}+59a_{19}x^{19}+\ldots+41a_1x+40a_0\right)$$

має, як видно із останньої рівності, не більше 21 різних коренів – протиріччя.

Відповідь. Не можуть.

Задача 5. Розв'язати в натуральних числах рівняння

$$2^n+3=11^k.$$

Розв'язання. Доведемо, що єдиним розв'язком цього рівняння є $n=3$, $k=1$. Нехай $n>3$ і $k>1$. Позначивши $a=n-3$ і $b=k-1$ задана рівність перепишеться так: $8\left(2^{a}-1\right)=11\left(11^{b}-1\right)$. Звідки слідує, що $2^{a}-1=11m$ і $11^{b}-1=8m$, де m – деяке непарне натуральне число. Нехай δ найменший показник числа 2 за модулем 11, тоді δ найменше натуральне число, для якого $2^{\delta}\equiv1\left(\mathrm{mod}\,11\right)$. За малою теоремою Ферма $2^{10}\equiv1\left(\mathrm{mod}\,11\right)$. Тоді, за теоремою про подільність показників, одержуємо, що $\delta\,|\,10$, тобто $\delta\in\left\{1,2,5,10\right\}$. Так як $2^{1}\equiv2\left(\mathrm{mod}\,11\right)$, $2^{2}\equiv4\left(\mathrm{mod}\,11\right)$, $2^{5}\equiv-1\left(\mathrm{mod}\,11\right)$ і $2^{10}\equiv1\left(\mathrm{mod}\,11\right)$, то $\delta=10$. Оскільки $2^{a}\equiv1\left(\mathrm{mod}\,11\right)$, то $10\,|\,a$, тобто $a=10c$, де c – деяке натуральне число. Так як $11^{b}-1=8m$ і $\left(11^{b}-1\right)\vdots\left(11-1\right)=10$, то $\left(11^{b}-1\right)\vdots5$, а тому і $m\vdots5$, тобто $5\,|\left(2^{a}-1\right)$. Нехай d найменший показник числа 2 за модулем 5, тоді $d=4$. За теоремою про подільність показників, одержуємо, що $4\,|\,a$. Оскільки $10\,|\,a$ і $4\,|\,a$, то $a\vdots20$, тобто $a=20l$, де l – деяке натуральне число. Так як $2^{a}-1=\left(2^{20}\right)^{l}-1$ ділиться на $2^{20}-1=41\cdot25\cdot1023$, то $41|11^{b}-1$, тобто $11^{b}\equiv1\left(\mathrm{mod}\,41\right)$. Нехай g найменший показник числа 11 за модулем 41, тобто $11^{g}\equiv\left(\mathrm{mod}\,41\right)$, тоді $g=40$. Дійсно, за малою теоремою Ферма $11^{40}\equiv1\left(\mathrm{mod}\,41\right)$, тоді $g\,|\,40$, тобто $g\in\left\{1,2,4,5,8,10,20,40\right\}$. Тоді,

$$11^{1}\equiv11\left(\mathrm{mod}\,41\right),\ 11^{2}\equiv-2\left(\mathrm{mod}\,41\right),\ 11^{4}\equiv\left(11^{2}\right)^{2}\equiv\left(-2\right)^{2}\equiv4\left(\mathrm{mod}\,41\right),$$

$$11^{5}\equiv11\cdot11^{4}\equiv11\cdot4\equiv3\left(\mathrm{mod}\,41\right),\ 11^{8}\equiv\left(11^{4}\right)^{2}\equiv4^{2}\equiv16\left(\mathrm{mod}\,41\right),$$

$$11^{10}\equiv\left(11^{5}\right)^{2}\equiv3^{2}\equiv9\left(\mathrm{mod}\,41\right),\ 11^{20}\equiv\left(11^{10}\right)^{2}\equiv9^{2}\equiv81\equiv-1\left(\mathrm{mod}\,41\right).$$

З того, що $11^{b}\equiv1\left(\mathrm{mod}\,41\right)$ і $g=40$ одержуємо, що $40\,|\,b$, тобто $b=40t$, де t – деяке натуральне число. Це означає, що $11^{b}-1=\left(11^{40}\right)^{t}-1$ ділиться на $11^{40}-1$, яке ділиться на 16. Дійсно, $11^{40}=\left(11^{2}\right)^{20}\equiv\left(-1\right)^{20}\equiv1\left(\mathrm{mod}\,16\right)$. Так як $11^{b}-1=8m$ ділиться на 16, то m – парне. Протиріччя.