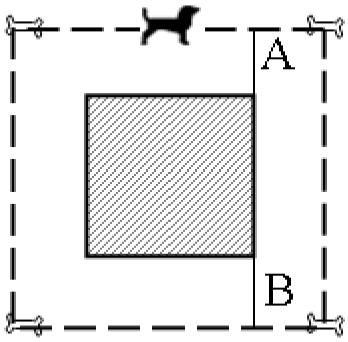
1. **Тузик.**

(8 клас) Тузик біжить по квадратній доріжці зі стороною *2a*, збираючи кістки, що лежать у кожному її куті, рухаючись навколо вертикальної дзеркальної колони зі стороною *a*. Який шлях пройшли сумарно усі його уявні зображення? Вважати відстань між доріжкою та колоною постійною.

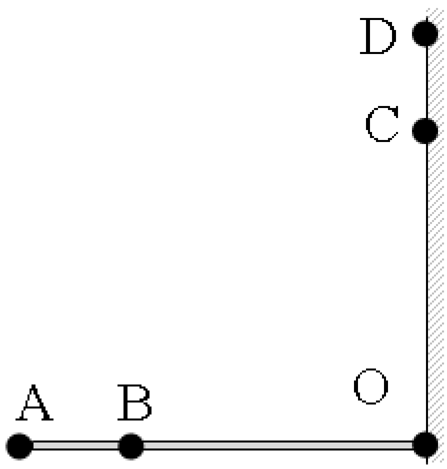


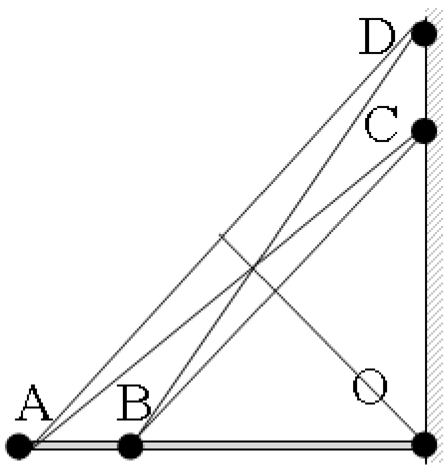
Розв'язання

Дзеркала плоскі, значить уявне зображення Тузика у дзеркалі знаходиться на такій самій відстані від поверхні дзеркала, як і сам Тузик. А шлях уявного зображення дорівнює шляху, пройденому самим Тузиком. Дзеркало дає зображення Тузика коли він знаходиться перед ним до того моменту, доки він не перетне лінію AB. До цього він має одне зображення, а після цього – два. Одне зображення продовжує свій шлях так саме, як і до лінії AB. Інше зображення проходить такий самий шлях, але не паралельно дзеркалу, а перпендикулярно йому. Зрозуміло, що є 4 області першого типу і чотири області другого. Так як сторона доріжки дорівнює *2a*, а сторона колони дорівнює *a*, то усередині будь-якої області Тузик проходить шлях *a*. Таким чином, сумарний шлях усіх його уявних зображень при одному обході навколо дзеркальної колони $S = 4a + 2\cdot 4a = 12a$.

2. **Балка з крючками**

Однорідна масивна балка *AO* прикріплена до стінки за допомогою шарніру (без тертя) у точці *O*. Балка кріпиться горизонтально за допомогою мотузки, яку можна кріпити за крючки у точках A або B попарно з *C* або *D*, враховуючи, що *AO=DO, AB=CD=AO/4*. З'ясувалося, що при одному з випадків кріплення, мотузка розірвалася. З якою силою натягнута мотузка у кожному варіанті кріплення? При якому способі кріплення мотузка розірвалася? Масою мотузки і крюків, порівняно з масою балки можна знехтувати.





Розв'язання

У всіх випадках плече центра мас $d = \frac{L}{2}$. Розглянемо різні варіанти кріплення:

<u>Варіант кріплення точки С і В.</u> Плече сили натягу мотузки $d_1 = \frac{3\sqrt{2}}{8}L$. З правила моментів $T_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}mg$.

<u>Варіант кріплення точки D і А.</u> Плече сили натягу мотузки $d_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}L$. Виходячи з цього $T_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$.

<u>Варіант кріплення точки С і А, D і В.</u> Утворюються рівні трикутники, тому сили натягу мотузки мають однакові значення. Плече сили натягу мотузки $d_3 = \frac{3}{5}L$, тому $T_3 = T_4 = \frac{5}{6}mg$.

Мотузка розривається при кріпленні до точок С і В. Зауважимо, що геометрично утворюються єгипетські трикутники.

3. Чайник

Змінюючи напругу, що подається на чайник, можна змінювати споживану їм потужність *P*. В залежності від *P* чайник з водою можна нагріти до різних максимальних температур. Цю залежність відображує таблиця 1:

Таблиця 1.

Потужність *P*, Вт	0	100	200	300
Температура t, °С	20	40	60	80

Таблиця 2.

Час τ, с	0	60	300	600	1200	2400
Температура, t, °С	80	75	60	45	30	20

Остигання нагрітого чайника, вимкненого з мережі, описує таблиця 2. Визначити об'єм води у чайнику якщо теплоємність пустого чайника c_0 = 100 Дж/К, питома теплоємність води c = 4200 Дж/кг·К, густина води ρ = 1000 кг/м^3.

Розв'язання

1 спосіб

Для таблиці 1. діє співвідношення, що описує яке визначає втрати тепла при процесі теплообміну, що встановився:

$P = k\,(t - t_{н.с.})$.

При нульовій потужності з нього випливає $t_{н.с} = 20$°C.

При наступному значенні потужності (100 Вт) з нього випливає $k = 5$.

Для таблиці 2:

$(c{\cdot}m+C)\ ?t = k\,(t - t_{н.с.})\ ?т$

Тут *?t* береться різниця між більшою та меншою температурами.

В точках 80° і 60°

Побудуємо графік залежності температури від часу:

;

По α_1: (t = 75°)

, звідки $V = 941{,}9 \cdot 10^{-6}$ м^3.

По α_2: (t = 60°)

, звідки $V = 783{,}3 \cdot 10^{-6}$ м^3.

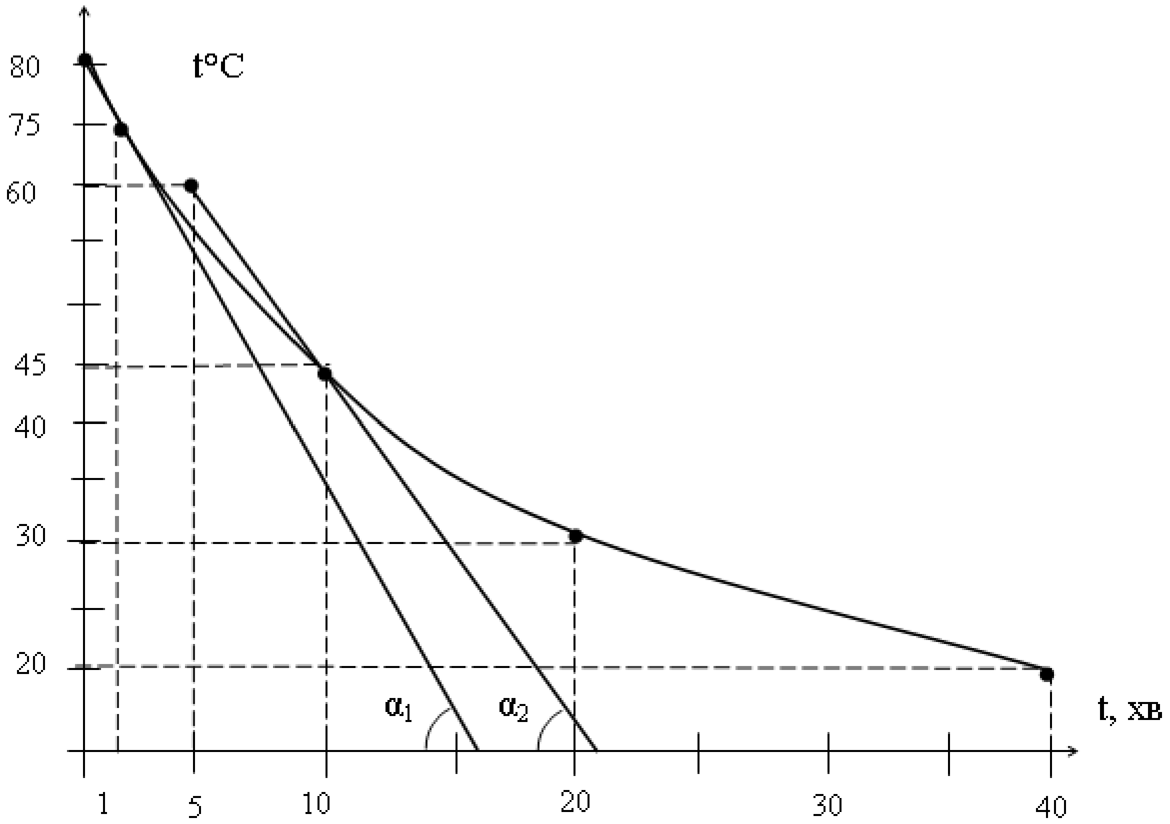
$V_{сер} = 862 \cdot 10^{-6}$ м^3.

Теоретично, з метою перевірки знайденого результату (з підстановкою знайденого V):

По α_1: (t = 45°)

За графіком:

Отже приблизно співпадає.



2 спосіб

P = k (t – $t_{н.с.}$), k = 5, t = 20°C.

Умова тепловіддачі при 80°C і при температурі 75°C приблизно є однаковою.

З таблиці 1: за 1 с 300 Дж. (Тут при 75°C потужність дещо менша, але не набагато)

За таблицею 2, остигання за 1 хвилину (за 60 с) 18000 Дж;

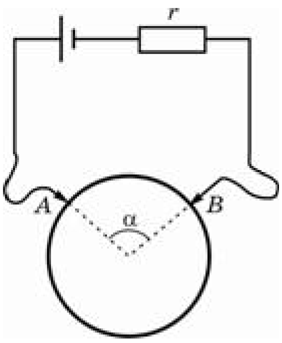
$18000 = (4200 \cdot 1000 \cdot V + 100) \cdot 5;$

$4200 \cdot 1000 \cdot V = 3600 – 100;$

$4{,}2 \cdot 10^6 \cdot V = 3500;$

$V = 833 \cdot 10^{-6}$ $м^3$

4.Кільце



(9 клас) З тонкого жорсткого дроту опором 81 Ом виготовили кільце та підключили його до джерела постійної напруги 16 В через резистор опором *r* = 8 Ом (див. рисунок) за допомогою двох ковзних контактів *A* і *B*. Накресліть приблизний графік залежності *P(α)* де *P* — потужність струму в кільці, *0<α<180°*. Визначте максимальне значення потужності струму в кільці.

Розв'язання. Ковзні контакти A і B розділяють кільце на дві паралельно з'єднані ділянки. Якщо позначити опір меншої з них через x то опір більшої R – x, а загальний опір кільця Якщо x змінюється від нуля до R/2 значення z монотонно збільшується від нуля до R/4, тобто від нуля до 20,25 Ом. Сила струму в колі а потужність струму в кільці $P = I^2 z = \frac{U^2 z}{(z+r)^2}$. Ця потужність змінюється залежно від (отже, й від) уже не монотонно. Перетворимо вираз для потужності

. Він набуває максимального значення тоді, коли знаменник є мінімальним. Як

відомо, сума двох чисел, добуток яких постійних (z і) мінімальна, якщо вони рівні (з усіх прямокутників даної площини найменший периметр у квадрата). Отже, максимальне значення потужності відповідає значенню і дорівнює $P_{max} = \frac{U^2}{4r}$. Оскільки потужність струму в кільці спочатку збільшується від нуля до $P_{max} =$ 8 Вт, а потім зменшується до значення $P_1 =$ 6,5 Вт. Значення =8 Ом відповідає 9 Ом, тобто випадку, коли між контактами і міститься 1/9 кільця (40°). Графік залежності потужності від кута наведено на рисунку.