1. Обчисліть добуток

$$\left(\sqrt{3}+tg1^{o}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+tg2^{o}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{3}+tg29^{o}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+tg30^{o}\right).$$

Розв'язання. Нехай $F=\left(\sqrt{3}+tg1^{o}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+tg2^{o}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{3}+tg29^{o}\right)$. Оскільки

$$\sqrt{3}+tg1^{o}=tg60^{o}+tg1^{o}=\frac{\sin60^{o}\cdot\cos1^{o}+\cos60^{o}\cdot\sin1^{o}}{\cos60^{o}\cdot\cos1^{o}}=\frac{\sin61^{o}}{\cos60^{o}\cdot\cos1^{o}},$$

то аналогічно матимемо

$$\sqrt{3}+tg2^{o}=\frac{\sin62^{o}}{\cos60^{o}\cdot\cos2^{o}},\ \ldots,\quad \sqrt{3}+tg29^{o}=\frac{\sin89^{o}}{\cos60^{o}\cdot\cos29^{o}}.$$

Таким чином,

$$F=\frac{\sin61^{o}}{\cos60^{o}\cdot\cos1^{o}}\cdot\frac{\sin62^{o}}{\cos60^{o}\cdot\cos2^{o}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin89^{o}}{\cos60^{o}\cdot\cos29^{o}}=\left(\frac{1}{\cos60^{o}}\right)^{29}=2^{29}.$$

Крім того,

$$\sqrt{3}+tg30^{o}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Тому,

$$F=\frac{2^{31}}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь. $\frac{2^{31}}{\sqrt{3}}$.

2. *Чи існує таке просте трицифрове число $\overline{abc}$, для якого b^2-4ac – квадрат цілого числа?*

Розв'язання. Нехай $b^2-4ac=k^2$, де k – натуральне число, $k\le b$. Тоді

$$4a\cdot\overline{abc}=4a(100a+10b+c)=400a^2+40ab+4ac=$$

$$=(20a+b)^2-\left(b^2-4ac\right)=(20a+b-k)(20a+b+k). \qquad (*)$$

Оскільки a, b, k – натуральні, то $20a+b+k$ і $20a+b-k$ також натуральні. Так як $\overline{abc}$ – просте, то із $(*)$ випливає, що $20a+b-k$ ділиться на $\overline{abc}$ або $20a+b+k$ ділиться на $\overline{abc}$.

Якщо $(20a+b-k)\vdots\overline{abc}$, то $20a+b-k \geq \overline{abc}$, тобто $80a+9b+c+k \leq 0$, що неможливо при натуральних a, b, c і k.

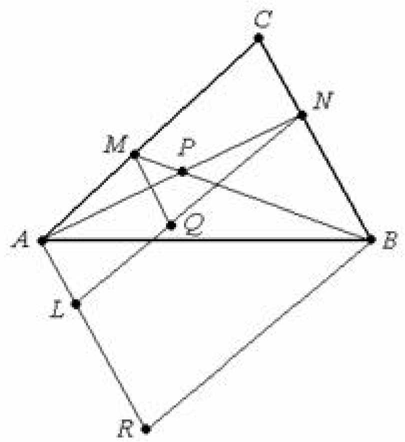
Якщо $(20a+b+k)\vdots\overline{abc}$, то $20a+b+k \geq \overline{abc}$, тобто $80a+9b+c-k \leq 0$, що неможливо при натуральних a, b, c і $k \leq b$.

Одержані протиріччя свідчать про те, що потрібного трицифрового числа $\overline{abc}$ не існує.

Відповідь. Ні, не існує.

3. *На сторонах AB і BC довільно відмітили точки M і N відповідно. Нехай P – точка перетину відрізків AN і BM. Крім цього, відмітили точки Q і R так, що чотирикутники $MCNQ$ і $ACBR$ – паралелограми. Доведіть, що точки P, Q і R лежать на одній прямій.*

Розв'язання. Застосуємо теорему Менелая до трикутника ACN і прямої BPM:



$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CB}{BN}\cdot\frac{NP}{PA}=1.$$

Продовжимо відрізки NQ за точку Q до перетину з відрізком AR в точці L відповідно. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то $\frac{AM}{MC}=\frac{LQ}{QN}$ і $\frac{CB}{BN}=\frac{AR}{RL}$. Далі, розглянемо трикутник AML. Точки P, Q і R лежать на його сторонах AN, NL і продовженні сторони AL відповідно. Підрахуємо добуток відношень:

$$\frac{NP}{PA}\cdot\frac{AR}{RL}\cdot\frac{LQ}{QN}=\frac{NP}{PA}\cdot\frac{CB}{BN}\cdot\frac{AM}{MC}=1,$$

тобто за теоремою Менелая точки P, Q і R – колінеарні, що і треба було довести.

4. Нехай a, b, c – додатні дійсні числа. Доведіть нерівність

$$\frac{a}{b(b+c)^2}+\frac{b}{c(c+a)^2}+\frac{c}{a(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

Розв'язання. Скористаємося нерівністю Коші – Буняковського

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2,$$

де (a_1,a_2,a_3) і (b_1,b_2,b_3) дві трійки дійсних чисел. Запишемо цю нерівність для таких двох трійок $\left(\sqrt{ab},\sqrt{bc},\sqrt{ca}\right)$ і $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(b+c)},\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}(c+a)},\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}(a+b)}\right)$:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b(b+c)^2}+\frac{b}{c(c+a)^2}+\frac{c}{a(a+b)^2}\right)\geq\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

Далі слід скористатися відомою нерівністю: для додатних чисел a, b і c виконується нерівність

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Таким чином,

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b(b+c)^2}+\frac{b}{c(c+a)^2}+\frac{c}{a(a+b)^2}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

Звідси й випливає потрібна нерівність.

5. Зайдіть усі такі функції f, які визначенні на множині всіх дійсних чисел і набувають дійсних значень, що для всіх дійсних x і y справджується рівність

$$f\left(f(x)-y\right)=f\left(x^2+y\right)-4f(x)y.$$

Розв'язання. Нехай $(x,y)=\left(x,-x^2\right)$, тоді за умовою задачі

$$f\left(f(x)+x^2\right)=f(0)+4x^2f(x). \qquad (1)$$

Нехай $(x,y)=\left(x,f(x)\right)$, тоді за умовою задачі

$$f(0)=f\left(x^2+f(x)\right)-4\left(f(x)\right)^2. \qquad (2)$$

Додавши (1) і (2), одержуємо

$$4f(x)\left(f(x)-x^2\right)=0. \qquad (*)$$

Звідси випливає, що для кожного дійсного x виконується хоча б одна із двох рівностей $f(x)=0$ або $f(x)=x^2$. Легко перевірити, що функції $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$ і $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ задовольняють задане функціональне рівняння.

Покажемо, що не існує інших функцій. Із $(*)$ випливає, що $f(0)=0$ для усіх функцій, що задовольняють умову. Припустимо, що існує така функція f, відмінна від двох знайдених, що для деякого $a\neq 0$ виконується рівність $f(a)=0$. Покладемо $(x,y)=(a,-t)$ в умову задачі, одержимо:

$$f(t)=f\left(a^2-t\right),$$

для будь-якого дійсного t. Із $(*)$ випливає, що коли $t\neq\frac{a^2}{2}$, то $t^2\neq\left(a^2-t\right)^2$, а тому $f(t)=f\left(a^2-t\right)=0$. Це означає, що $f(t)=0$ для всіх дійсних $t\neq\frac{a^2}{2}$. Припустимо, що $f\left(\frac{a^2}{2}\right)\neq 0$, тоді $f\left(\frac{a^2}{2}\right)=\frac{a^4}{4}$. Покладемо (1) $x=\frac{a^2}{2}$, одержимо:

$$f\left(f\left(\frac{a^2}{2}\right)+\frac{a^4}{4}\right)=4\cdot\frac{a^4}{4}\cdot f\left(\frac{a^2}{2}\right),$$

тобто

$$f\left(\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{4}\right)=a^4\cdot\frac{a^4}{4},$$

$$f\left(\frac{a^4}{2}\right)=\frac{a^8}{4}.$$

Оскільки $a\neq 0$, то $\frac{a^2}{2}\neq\frac{a^4}{4}$, тому $f\left(\frac{a^4}{4}\right)=0$, тобто $\frac{a^8}{4}=0$. Звідки одержуємо, що $a=0$. Протиріччя. Отже, інших функцій крім двох знайдених, не існує.

Відповідь. $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$ та $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$.