

1. Чи існує таке натуральне число n , для якого добуток

$$(1+1^2+1^4)(1+2^2+2^4)(1+3^2+3^4)\dots(1+n^2+n^4)$$

є квадратом цілого числа?

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{y} = \frac{26}{9}, \\ \sqrt{y} - \frac{1}{z} = \frac{26}{9}, \\ \sqrt{z} - \frac{1}{x} = \frac{26}{9}. \end{cases}$$

3. Нехай a, b, c такі додатні дійсні числа, що $abc = 1$. Доведіть, що

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geq 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

4. Для множини невід'ємних цілих чисел $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k \geq 2$ позначимо через $A + A$ – множини всіх чисел виду $a_i + a_j$, а через $A - A$ – множини всіх чисел виду $a_i - a_j$, де i та j пробігають всі можливі цілі значення від 1 до k . Наприклад, для $A = \{1, 2, 3, 4\}$ матимемо: $A + A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а $A - A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Чи може трапитися так, щоб число елементів в $A + A$ було більшим за число елементів в $A - A$?

5. а) Чи існує два рівних дев'ятикутники, всі вершини яких співпадають, але жодні дві сторони не співпадають?

б) Чи існує три рівних дев'ятикутники, всі вершини яких співпадають, але жодні дві сторони не співпадають?

(Нагадаємо, що многокутником на площині називають просту (без самоперетинів) замкнену ламану, сусідні ланки якої не лежать на одній прямій.)

1. Чи існує таке натуральне число n , для якого добуток

$$(1+1^2+1^4)(1+2^2+2^4)(1+3^2+3^4)\dots(1+n^2+n^4)$$

є квадратом цілого числа?

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{y} = \frac{26}{9}, \\ \sqrt{y} - \frac{1}{z} = \frac{26}{9}, \\ \sqrt{z} - \frac{1}{x} = \frac{26}{9}. \end{cases}$$

3. Нехай a, b, c такі додатні дійсні числа, що $abc = 1$. Доведіть, що

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geq 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

4. Для множини невід'ємних цілих чисел $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k \geq 2$ позначимо через $A + A$ – множини всіх чисел виду $a_i + a_j$, а через $A - A$ – множини всіх чисел виду $a_i - a_j$, де i та j пробігають всі можливі цілі значення від 1 до k . Наприклад, для $A = \{1, 2, 3, 4\}$ матимемо: $A + A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а $A - A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Чи може трапитися так, щоб число елементів в $A + A$ було більшим за число елементів в $A - A$?

5. а) Чи існує два рівних дев'ятикутники, всі вершини яких співпадають, але жодні дві сторони не співпадають?

б) Чи існує три рівних дев'ятикутники, всі вершини яких співпадають, але жодні дві сторони не співпадають?

(Нагадаємо, що многокутником на площині називають просту (без самоперетинів) замкнену ламану, сусідні ланки якої не лежать на одній прямій.)