**1.** Чи існує таке натуральне число $n$, для якого добуток

$$\left(1+1^2+1^4\right)\left(1+2^2+2^4\right)\left(1+3^2+3^4\right)\ldots\left(1+n^2+n^4\right)$$

є квадратом цілого числа?

***Розв'язання.*** Нехай $a_k=1+k^2+k^4$, де $k=1,2,3,\ldots,n$. Обчислюючи декілька перших значень, знаходимо: $a_1=1\cdot 3$, $a_2=3\cdot 7$, $a_3=7\cdot 13$, $a_4=13\cdot 21$ і т.д.. Помічаємо, що другий множник кожного члена послідовності співпадає з першим множником наступного. Для доведення цієї гіпотези скористаємося тим, що

$$a_k=1+k^2+k^4=\left(1+k^2\right)^2-k^2=\left(1-k+k^2\right)\left(1+k+k^2\right)$$

і

$$a_{k+1}=\left(1-(k+1)+(k+1)^2\right)\left(1+(k+1)+(k+1)^2\right)=$$

$$=\left(1+k+k^2\right)\left(3+3k+k^2\right).$$

Тому, перемножуючи $a_1$, $a_2$, $a_3$, …, $a_n$, ми одержимо наступний добуток:

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=3^2\cdot 7^2\cdot 13^2\cdot\ldots\cdot\left(1+(n-1)+(n-1)^2\right)^2\cdot\left(1+n+n^2\right).$$

Ми бачимо, що цей добуток складається з квадратних множників: $3^2$, $7^2$, $13^2$, …, $\left(1-n+n^2\right)^2$ і останнього множника $1+n+n^2$. Оскільки число $1+n+n^2$ не є квадратом цілого числа (бо воно при будь-кому $n$ знаходиться між двома послідовними квадратами: $n^2<1+n+n^2<(n+1)^2$), то і весь добуток $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$ на є квадратом цілого числа.

***Відповідь.*** Ні, не існує.

**2.** *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases}\sqrt{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{26}{9},\\ \sqrt{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{26}{9},\\ \sqrt{z}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{26}{9}.\end{cases}$$

***Розв'язання.*** Нехай $(x,y,z)$ – розв'язок системи, тоді мають місце наступні рівності:

$$\sqrt{x}=\frac{1}{y}+\frac{26}{9},\quad \sqrt{y}=\frac{1}{z}+\frac{26}{9},\quad \sqrt{z}=\frac{1}{x}+\frac{26}{9}.$$

Додавши ці рівності одержуємо, що

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{26}{3}.$$

Звідки слідує, що

$$\left(\sqrt{x}-3\right)f(x)+\left(\sqrt{y}-3\right)f(y)+\left(\sqrt{z}-3\right)f(z)=0, \qquad (*)$$

де

$$f(t)=\frac{9t+\sqrt{t}+3}{9t}>0, \text{ бо } t>0.$$

Доведемо, що $\sqrt{x}\geq 3$. Нехай $\sqrt{x}<3$, тоді $0<x<9$, а $\sqrt{z}=\frac{1}{x}+\frac{26}{9}>\frac{1}{9}+\frac{26}{9}=3$. Далі отримуємо: $z>9$, $0<\frac{1}{z}<\frac{1}{9}$, а $\sqrt{y}=\frac{1}{z}+\frac{26}{9}<\frac{1}{9}+\frac{26}{9}=3$. Далі $0<y<9$, $\frac{1}{y}>\frac{1}{9}$, а $\sqrt{x}=\frac{1}{y}+\frac{26}{9}>\frac{1}{9}+\frac{26}{9}=3$, що суперечить припущенню. Аналогічно доводиться, що $\sqrt{y}\geq 3$ і $\sqrt{z}\geq 3$. Тоді із $(*)$ випливає, що $(x,y,z)=(9,9,9)$. Перевірка показує, що знайдена трійка чисел є розв'язком заданої системи рівнянь.

***Відповідь.*** $(x,y,z)=(9,9,9)$.

**3.** *Нехай* $a$, $b$, $c$ *такі додатні дійсні числа, що* $abc=1$. *Доведіть, що*

$$\left(a^2+a+1\right)\left(b^2+b+1\right)\left(c^2+c+1\right)\geq 3(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

***Розв'язання.*** Розглянемо різницю між лівою і правою частинами даної нерівності, розкриємо дужки, зведемо подібні доданки і врахуємо, що $abc=1$. Тоді матимемо:

$$\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+2(ab+bc+ca)+\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(a+b+c)-$$

$$-2\left(\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\left(a^2c+b^2a+c^2b\right)\right)-6=$$

$$=(ab+bc+ca)^2+(a+b+c)^2-2\left(\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\left(a^2c+b^2a+c^2b\right)\right)-6=$$

$$(ab+bc+ca)^2-2(ab+bc+ca)(a+b+c)+(a+b+c)^2=$$

$$=\left((ab+bc+ca)-(a+b+c)\right)^2\geq 0.$$

**4.** *Для множини невід'ємних цілих чисел* $A=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $k\ge 2$ *позначимо через* $A+A$ *– множину всіх чисел виду* $a_i+a_j$, *а через* $A-A$ *– множину всіх чисел виду* $a_i-a_j$, *де* $i$ *та* $j$ *пробігають всі можливі цілі значення від* $1$ *до* $k$. *Наприклад, для* $A=\{1,2,3,4\}$ *матимемо:* $A+A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$, *а* $A-A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. *Чи може трапитися так, щоб число елементів в* $A+A$ *було більшим за число елементів в* $A-A$*?*

***Розв'язання.*** Так, може. Для множини $A=\{0,2,3,4,7,11,12,14\}$ матимемо:

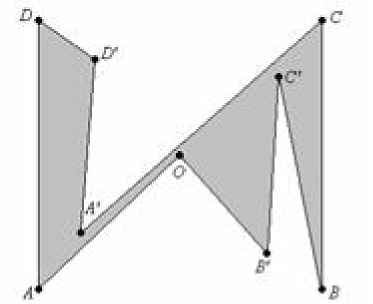
$$A+A=[0;28]\setminus\{1,20,27\},\ \text{а}\ |A+A|=26;$$

$$A-A=[-14;14]\setminus\{-13,-6,6,13\},\ \text{а}\ |A-A|=25.$$

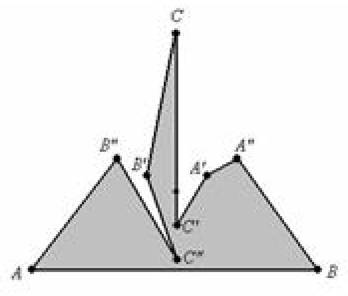
**5.** *а) Чи існує два рівних дев'ятикутники, всі вершини яких співпадають, але жодні дві сторони не співпадають?*

*б) Чи існує три рівних дев'ятикутники, всі вершини яких співпадають, але жодні дві сторони не співпадають?*

*(Нагадаємо, що многокутником на площині називають просту (без самоперетинів) замкнену ламану, сусідні ланки якої не лежать на одній прямій.)*




***Розв'язання.*** а) Так, існує. Шуканий дев'ятикутник будуємо так. Візьмемо квадрат $ABCD$ із центром $O$. Застосуємо до квадрата $ABCD$ гомотетію з центром $O$ і коефіцієнтом $0<k<1$, повернемо одержаний квадрат на дуже маленький кут за годинниковою стрілкою; одержаний квадрат позначимо $A'B'C'D'$. Перший дев'ятикутник – замкнена ламана $AOB'BC'CDD'A'A$. Другий дев'ятикутник одержується з першого поворотом навколо точки $O$ на кут $90^\circ$. Ці два дев'ятикутники задовольняють умовам задачі.




б) Так, існує. Шуканий дев'ятикутник будуємо так. Візьмемо правильний трикутник $ABC$ і побудуємо ще два правильних трикутники $A'B'C'$ та $A''B''C''$ так, як це вказано на малюнку (точки $A, A', A''$ лежать на одній прямій, трикутники $ABC$, $A'B'C'$ і $A''B''C''$ мають спільний центр, точки $A$ і $A'$ та $A$ і $A''$ лежить по різні боки від центра). Перший дев'ятикутник – замкнена ламана $ABA''A'C'CB'C''B''A$, а другий і третій одержуються з першого поворотом навколо центра трикутника $ABC$ на кути $120^\circ$ і $240^\circ$.

*В.А. Ясінський, доцент кафедра алгебри і методики викладання математики Вінницького державного педагогічного університету ім. Михайла Коцюбинського.*