1. Послідовність цілих чисел a_1, a_2, a_3, … така, що $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ і для кожного натурального $n \geq 1$

$$a_{n+2} = \begin{cases} 2001a_{n+1} - 2003a_n, \text{якщо } a_{n+1}a_n - \text{парне число}, \\ a_{n+1} - a_n, \text{якщо } a_{n+1}a_n - \text{непарне число}. \end{cases}$$

Чи існує таке натуральне число m, що $a_m = 2000$?

2. Точка P знаходиться зовні кола ω з центром O. Прямі l_1 та l_2 проходять через точку P, причому l_1 дотикається кола ω в точці A, а l_2 перетинає ω в точках B і C. Дотичні до кола ω в точках B і C перетинаються в точці Q. Нехай K - точка перетину прямих BC і AQ. Доведіть, що $(OK) \perp (PQ)$.

3. Знайти всі функції $f : R \to R$ такі, що

1) $|f(x)| \geq 1$ для всіх дійсних x;

2) $f(x+y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 + f(x) \cdot f(y)}$ для всіх дійсних x та y.

4. Нехай m і n - натуральні числа, які задовольняють нерівність $n\sqrt{7} > m$. Доведіть, що тоді виконується й така нерівність $n\sqrt{7} > m + \dfrac{1}{m}$.

5. На площині проводять три набори паралельних прямих, по десять прямих в кожному наборі. На яку найбільшу кількість трикутників вони розріжуть дану площину?

На виконання роботи відведено 4 год.

Використання калькуляторів та записничків забороняється.