1. (6 балів) Нехай n – більше за одиницю натуральне число, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – такі додатні числа, що їхній добуток дорівнює одиниці. Довести, що серед них можна вибрати такі два числа та $(1 \le i \ne j \le n)$, що справджуватиметься нерівність

$$a_i^2\left(1 + 2a_j^3\right) \ge 3.$$

2. (***6 балів***) Задано неперервну функцію $f : [-2001; 2001] \to [-2001; 2001]$. Довести, що існують такі числа $a, b \in [-2001; 2001]$, що

$$f(a) + f(b) = a - b.$$

3. (***6 балів***) В кожній клітинці таблиці розміру 10×10 записано натуральне число, яке не перевищує десяти, причому числа в будь-яких двох клітинках, що мають принаймні одну спільну вершину, є взаємно простими. Довести, що якесь число в цій таблиці зустрічається щонайменше 17 разів.

4. (***7 балів***) Дано опуклий п'ятикутник $ABCDE$, в якому $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle DAE$. Нехай – середина сторони CD, а – точка перетину прямих і , – точка перетину прямих AC і . Довести, що .

1 травня 2001 року

На виконання роботи відводиться 3 години

Використання калькуляторів не дозволяється